Investigações numéricas[1]

O conceito de número ocupa um lugar de destaque na Matemática escolar. Desenvolver o sentido do número, ou seja, adquirir uma compreensão global dos números e das operações e usá-la de modo flexível para analisar situações e desenvolver estratégias úteis para lidar com os números e as operações é um objectivo central da aprendizagem da Matemática. As investigações numéricas contribuem, de modo decisivo, para desenvolver esta compreensão global dos números e operações, bem como capacidades matemáticas importantes como a formulação e teste de conjecturas e a procura de generalizações. Os alunos podem realizar pequenas investigações que conduzem à descoberta de factos, propriedades e relações entre conjuntos de números. Podem investigar aspectos relacionados com as dízimas, os divisores ou os múltiplos de diferentes números. Podem, ainda, explorar sequências numéricas, descobrindo relações numéricas e apreendendo progressivamente a ideia de variável. Podem, também, estabelecer conexões entre os números e a Geometria.

Neste capítulo, começamos por apresentar uma tarefa de investigação numérica e mostrar o modo como ela foi explorada na sala de aula. Na parte final, apresentamos algumas potencialidades das tarefas numéricas de natureza investigativa.

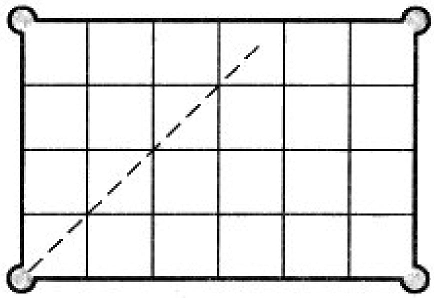
A mesa de snooker

Esta experiência foi realizada por duas professoras[1] que, ao longo de um ano lectivo, desenvolveram um projecto centrado na exploração de investigações na aula de Matemática. *A mesa de snooker* (Figura 4) foi proposta aos 17 alunos de uma turma da 8ª série (12-13 anos) perto do final do ano lectivo, numa altura em que já tinham uma certa experiência em realizar actividades de investigação.

Esta é uma estranha mesa de *snooker*. Tem apenas quatro buracos (nos cantos da mesa) e o tampo está dividido em quadrados todos iguais.

[1] Ponte, J. P., Brocardo, J., & OLiveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica. (Capítulo 3)

Nota que a mesa é rectangular. Se tomarmos para unidade o lado de qualquer dos quadrados podemos dizer que é uma mesa de dimensões 6×4.



Imagina que, como indicado na figura, jogamos a bola de um dos cantos, sem efeito e numa direcção que faz um ângulo de 45º com as tabelas. Supõe ainda que a bola só pára quando cai num buraco.

Nesta situação várias podem ser as questões a analisar. Por exemplo:

- quantos quadrados é que a bola vai atravessar?
- quantas vezes vai a bola bater nas tabelas?

(Nota: conta como "batida" a entrada da bola num buraco)

Procura realizar uma investigação que te permita responder às questões anteriores.

Para isso deverás investigar que relação tem a dimensão da mesa com aquilo que acontece à bola. Por exemplo: se pensarmos numa mesa com determinadas dimensões posso, de imediato, saber o número de quadrados que a bola atravessa e o número de vezes que a bola vai bater?

Podes começar por analisar o caso da mesa 6×4 e depois faz as experiências que considerares necessárias com mesas de outras dimensões.

Que outros aspectos poderias investigar?

Figura 4. *A mesa de snooker*[2]

Para explorarem esta tarefa os alunos trabalharam em pequenos grupos. No entanto, foi-lhes pedido que elaborassem um relatório escrito individual que deviam entregar no prazo de uma semana. A exploração e discussão desta tarefa ocupou duas aulas, uma de 100 minutos e outra de 50.

A professora não fez qualquer comentário de introdução da tarefa. Os alunos, depois de receberem o enunciado, começaram por o ler atentamente notando-se que esta atitude correspondia a uma certa compreensão da importância de perceber globalmente a tarefa antes de começar a trabalhar. Como dizia uma aluna, Cristina: "É melhor a gente começar por ler tudo para perceber o que temos de fazer".

Os alunos iniciaram a exploração da tarefa com um grande entusiasmo. Depois de lerem o enunciado começaram uma animada discussão sobre os aspectos que iam observando e os dados que deviam ir recolhendo. Todos participavam e ninguém solicitava a ajuda das professoras.

O foco da investigação foi claramente entendido pelos alunos. Depois de contarem, no caso da mesa 6×4, o número de quadrados que a bola atravessava e o número de "batidas", começaram a investigar o que se passava em mesas com outras dimensões. Alguns grupos organizaram-se de modo a recolher dados mais rapidamente. Assim, enquanto uns alunos analisavam um tipo de mesa, outros viam o que se passava com outras mesas. Após a recolha de um primeiro conjunto de dados, a formulação de uma conjectura baseada na análise de uma mesa particular era refutada rapidamente pois ela não se verificava numa mesa diferente.

Vejamos mais de perto como foi vivida esta fase do trabalho pelo grupo composto por Eva, João e Tita. Após analisarem vários tipos de mesa, João e Tita começaram a desanimar:

> Tita: A gente vai ver mais mesas mas cada vez isto fica mais complicado. Ainda fica mais difícil de descobrir uma relação que dê.
>
> (...)
>
> João: É pá. Isto não dá. Cada vez é pior. Dá para umas mas depois na outra falha logo.

Mas Eva continuava entusiasmada com a investigação e não desistia de descobrir uma relação que pudesse ser válida em qualquer tipo de mesa: "Ainda temos que desenhar muitas mesas. Podíamos ver se eles ali fizeram outras diferentes de nós. Vânia (uma aluna de outro grupo), já fizeram a mesa 7×3?". A esta pergunta de Eva seguiu-se uma animada troca de dados entre três dos grupos. No entanto, após algumas tentativas, ainda não conseguiam formular uma conjectura que resistisse a sucessivos testes.

> Eva: E se nós dividirmos as mesas por grupos diferentes?
>
> João: Ahh? O quê?

Eva: Então se em vez de vermos todas ao mesmo tempo fôssemos ver por casos diferentes. Por exemplo... Vermos as mesas em que um lado é 7.

Tita: Mas aqui pede para qualquer mesa.

Eva: Sim, mas pode ser que assim a gente consiga ter alguma ideia. Podemos tentar.

Na sequência desta sugestão o grupo envolve-se numa fase de trabalho em que os dados são agrupados tendo em conta determinadas características. Depois, procuram formular conjecturas válidas para cada um dos grupos de mesas que tinham considerado. Este tipo de exploração foi descrita com bastante detalhe no relatório elaborado por Eva:

- No caso do 7, o número de quadrados que passa é em alguns casos o produto da medida das mesas:

7×2	14
7×4	28
7×6	42
7×8	56
7×10	70

... Mas só dava em alguns casos.

- Por exemplo nos rectângulos cujas medidas da largura e do comprimento são o dobro, o número de quadrados que atravessa e o número de batidas é também o dobro.

6×7	42	6
12×14	84	12
24×28	68	24

- Mas por exemplo no caso do 3×4, 6×8 e 12×16 não acontece o mesmo:

3×4	12	6
6×8	24	6
12×16	48	6

- Acontece com o número de quadrados que atravessa mas não com o número de batidas.

- Outra conclusão a que chegámos foi no caso dos pares seguintes:

8×6	24	6
10×8	40	8
12×10	60	10
14×12	84	12
16×14	112	14
18×16	144	16

- Que o número de quadrados que atravessa é o produto das medidas dos lados a dividir por dois, e o número de batidas era igual ao número mais pequeno das medidas dos rectângulos.

Esta tentativa de agrupar os dados a partir de características comuns das dimensões das mesas não conduziu ao que os alunos procuravam – uma generalização válida para todo o tipo de mesas. No entanto, formularam e testaram conjecturas, procuraram contra-exemplos e foram aprofundando a compreensão da situação que estavam a explorar.

De um modo geral, todos os grupos passaram por um processo semelhante. Todos tinham bem claro a ideia de que deviam procurar relações válidas para todo o tipo de mesas. Estabeleciam conjecturas que testavam exaustivamente e tiravam conclusões sobre o tipo de mesas em que elas pareciam ser válidas.

A explicitação das tentativas feitas e dos casos em que eram ou não válidas conduziu, progressivamente, à descoberta de uma relação válida em todos os casos. Em muitas ocasiões, uma pequena sugestão das professoras foi suficiente para que os alunos conseguissem chegar a uma generalização:

Rita: Não sei como é que vai dar para todos. A gente multiplica mas umas vezes dá logo, noutras temos que dividir por 2, noutras por 3. Depende.

Professora: Sim. E achas que depende de quê?

Rita: Não sei... Temos de ir ver.

Professora: Então tentem lá ver os vários casos que têm.

Na sequência deste diálogo Rita sugere aos colegas fazer uma tabela organizada de uma maneira diferente das que tinham feito até esta altura. No seu relatório refere-se a esta fase do seguinte modo:

7×4 5×7xxxxx

> Para descobrir como achar o número de quadrados percorridos organizámos os números numa tabela que dizia por quanto tínhamos de dividir os lados após os termos multiplicado:

: 1	: 2	: 3	: 4	: 5
7×4	4×2	6×9	24×20	5×15
7×8	12×10			10×5
7×6				
5×7				

A partir desta organização os alunos percebem que têm de dividir o produto das dimensões das mesas pelo máximo divisor comum entre elas e concluem que $\frac{m\times n}{mdc(m,n)}$ representa o número de quadrados que a bola atravessa numa mesa $m\times n$.

Esta conclusão, a que também foram chegando os outros grupos, surpreendeu um pouco as professoras. De facto, ao prepararem a tarefa, estavam à espera que os alunos fossem progressivamente relacionando o número de quadrados percorridos pela bola de *snooker* com o menor múltiplo comum entre as dimensões da mesa. No entanto, tendo em conta o modo como os alunos começaram a analisar os dados recolhidos, concluíram que foi mais "natural" que tivessem chegado à expressão $\frac{m\times n}{mdc(m,n)}$. Desde o início que os alunos experimentavam expressões em que usavam uma ou várias das operações elementares para chegar a uma expressão geral e a ideia do máximo divisor comum só surgiu uma vez que concretizava uma relação que parecia prometedora.

A partir desta descoberta os alunos chegaram facilmente à expressão que representava o número de "batidas" da bola. Para as mesas em que dividiam o produto das dimensões por 1 (7×4, 7×8, 3×2, ...) os alunos já tinham descoberto que a expressão $m+n-1$ funcionava. Só que agora percebiam que o que tinham de especial estas mesas era o facto de o máximo divisor comum entre m e n ser 1 (a noção de que isso queria dizer que os números eram primos entre si foi surgindo, embora com alguma ajuda da professora). A partir daqui começaram a testar expressões em que surgia o máximo divisor comum e chegaram facilmente à expressão $\frac{m+n}{mdc(m,n)}-1$.

Relativamente à demonstração das expressões descobertas, a professora tinha referido que, neste caso, ela era complexa e não se deviam preocupar com ela. No entanto, várias intervenções dos alunos mostram que na fase final do ano lectivo, quando a tarefa se realizou, já estava perfeitamente interiorizada a noção de que uma conjectura só assume o papel de conclusão válida para todos os casos a partir do momento em que é demonstrada:

> Eva: Aqui já sabemos que dá. Quer dizer, como não provámos, só podemos dizer que achamos que dá. Isto continua a ser uma conjectura que deve ser mesmo verdade.
>
> Marta: Já sabemos como é para estas mesas aqui.
>
> Lino: Isto ainda é uma conjectura.
>
> Vânia: Sim, só que nos casos que temos dá.
>
> Cristina: É daquelas que a professora diz que temos quase a certeza.

A fase de discussão da tarefa foi relativamente breve. Os alunos analisaram muitos tipos de mesa, fizeram bastantes experiências procurando relacionar os dados e todos tinham chegado a expressões que pareciam válidas para qualquer mesa rectangular. Por isso, a professora, aproveitou uma parte do tempo destinado a esta fase para introduzir duas ideias. Uma primeira, decorreu da descoberta da expressão $\frac{m\times n}{mdc(m,n)}$ para representar o número de quadrados que a bola de *snooker* atravessa e consistiu em chegar à relação $mmc(m,n)=\frac{m\times n}{mdc(m,n)}$. Uma segunda ideia consistiu em incentivar os alunos a formularem outras questões que pudessem investigar. No entanto, a aula estava a terminar e isto não pareceu despertar grande curiosidade aos alunos. Mesmo assim, a professora ainda conseguiu conduzir um diálogo que perspectivava uma outra questão que podia ser investigada: descobrir, tendo em conta as dimensões da mesa, o buraco em que sai a bola.

O balanço final relativamente à exploração desta tarefa foi bastante positivo. As professoras concordavam que os alunos tinham conseguido usar um raciocínio matemático que envolvia a organização sistemática de dados, a formulação de conjecturas e a realização de um número considerável de testes. Por outro lado, os alunos mostraram ter sempre presente o foco da investigação – descobrir uma forma de saber, numa mesa qualquer, o número de "batidas" e o número de quadrados que a bola atravessa – e perceber a diferença entre uma conjectura válida para muitos casos e uma conclusão válida para todos. Finalmente, as professoras analisaram o caminho seguido para encontrar a expressão geral que representava o número de quadrados que a bola de *snooker* atravessa. Ao preparar esta tarefa, tinham previsto relacionar os dados recolhidos com o menor múltiplo comum. No entanto, as tentativas dos alunos, muito centradas na análise do produto das dimensões das mesas, conduziu-os a outra relação. A oportunidade de explorar, a partir do trabalho realizado pelos alunos, a relação entre o *mmc* e *mdc*, foi considerada como uma potencialidade interessante desta tarefa e que inicialmente não tinham previsto.

As investigações numéricas no ensino da Matemática

Números e operações é um dos temas da Matemática que assume, desde o início da escolaridade, uma importância central. Hoje, um pouco por todo o mundo, perspectivam-se opções curriculares que, em vez de se centrarem na memorização e aplicação de técnicas de cálculo, dão ênfase à apropriação de aspectos essenciais dos números e suas relações. Os alunos devem desenvolver competências numéricas que lhes permitam avaliar se a resposta a uma situação problemática requer um valor exacto ou aproximando. Além disso, devem saber estimar o resultado aproximado de uma operação e resolvê-la, de acordo com a complexidade dos valores em causa e das operações, usando o cálculo mental, os algoritmos de papel e lápis ou a calculadora. Devem também conhecer, perceber e saber usar relações entre os números e desenvolver uma compreensão dos diferentes conjuntos numéricos.

As investigações numéricas contribuem, de modo decisivo, para prosseguir estas novas orientações curriculares. Desde muito cedo podem ser propostas tarefas em que os alunos são convidados a analisar padrões e regularidades envolvendo números e operações elementares. A tarefa *Um outro olhar sobre a tabuada* (Figura 5) é um exemplo desta potencialidade das investigações.

1. Constrói a tabuada do 3. O que encontras de curioso nesta tabuada? Prolonga-a calculando 11×3, 12×3, 13×3 ... e formula algumas conjecturas.

2. Investiga agora o que acontece na tabuada do 9 e do 11.

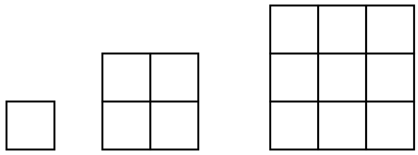
Figura 5. *Um outro olhar sobre a tabuada*

Os alunos de uma turma da 5ª série (10-11 anos) depois de explorarem esta tarefa chegaram a conclusões como:

- Quando se multiplica 3 por um número ímpar dá um numero ímpar; quando se multiplica por um par dá um número par. O produto termina sempre em número par, ímpar, par, ímpar; as unidades no produto repetem-se sempre pela mesma ordem... Repetem-se de 10 em 10; cada repetição tem os 10 algarismos.
- Na tabuada do 11 até 11×9, no produto, o algarismo das unidades é igual ao algarismo das dezenas. O algarismo das unidades, no produto, repete-se de 0 até 9 consecutivamente. O das dezenas também se repete mas salta um algarismo de 10 em 10. O algarismo das centenas aumenta uma unidade de 9 em 9.

Este tipo de tarefas, para além de poder ser uma boa maneira de iniciar os alunos nas actividades de investigação, permite desenvolver conhecimentos importantes acerca dos números e levá-los a formular questões que decorrem das explorações que vão fazendo. Por exemplo, depois de constatarem que o produto de um número ímpar por um número par é sempre par, podem surgir interrogações como: o que se passa com a soma de um número par com um ímpar? Por outro lado, estas tarefas também podem constituir um contexto interessante para o estudo dos múltiplos e dos critérios de divisibilidade: a tabuada do 5 pode levar à conjectura de que todos os múltiplos de 5 terminam em 0 ou 5 e levar os alunos a perceber que para ver se um número é divisível por 5 basta verificar se ele termina em 0 ou 5.

Uma outra potencialidade das investigações numéricas é a de proporcionarem o estabelecimento de conexões matemáticas. Muitas investigações numéricas promovem a compreensão de relações entre padrões numéricos e geométricos e a utilização de conceitos geométricos para simplificar a recolha de dados e facilitar a compreensão de determinadas relações numéricas. Um exemplo bastante sugestivo é o da análise da sequência dos quadrados perfeitos:

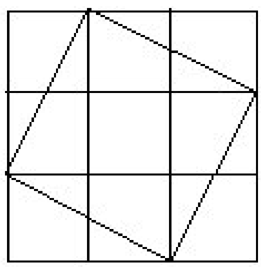


Ao prolongar e analisar esta sequência os alunos apercebem-se que $4 = 1 + 3$, $9 = 4 + 5$, $16 = 9 + 7$... e visualizam porque é para obter um quadrado de lado $n + 1$ é necessário adicionar o número ímpar $2n + 1$, dando sentido geométrico à relação $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

A tarefa *Quadrados em quadrados* (Figura 6) é um outro exemplo em que é feito apelo ao estabelecimento de conexões entre a Geometria e os Números.

Num quadrado podem-se inscrever outros quadrados. De entre estes considera aqueles cujos vértices são pontos de intersecção das quadrículas com os lados do quadrado inicial.

Na figura, podes observar um quadrado 3×3, com um quadrado inscrito, nas condições descritas atrás.



1. Num quadrado como este, quantos quadrados nestas condições poderás inscrever? E em quadrados 4×4? E 5×5?

2. Com base nos quadrados que já desenhaste e alargando o teu estudo a quadrados com dimensões diferentes, investiga possíveis relações entre os quadrados inscritos e o quadrado inicial.

Figura 6. *Quadrados em quadrados*

A análise da pergunta 2 originou, numa turma da 8ª série, uma interessante discussão sobre a relação entre a área do quadrado inicial e as dos quadrados inscritos. Numa primeira fase, os alunos conjecturaram sobre as áreas dos quadrados inscritos num mesmo quadrado observando os desenhos que tinham feito. A conjectura de que eram todas iguais foi rapidamente refutada e começaram a aparecer propostas respeitantes a outras relações, sugeridas a partir da análise dos quadrados inscritos no quadrado 4×4:

Cristina: Professora, à medida que se vai afastando vai crescendo.

Tita: Sim

Professora (dirigindo-se à Tita): Então no 4×4 diz-me lá qual é que tu dizes que é maior do que qual.

Tita: Aaah o que fica no primeiro vértice.

Cristina: Pois, é isso.

Lino: Pois é.

Tita: Depois o que ficou no segundo é mais pequeno e o que ficou no terceiro é...

Lino: Igual ao primeiro.

Professora: É?

Cristina: Sim, é igual ao primeiro.

Marta: Eles são iguais dois a dois.

Vitória (apontando para o quadrado 5×5): Acho que o primeiro é igual ao segundo.

Cristina: O primeiro é igual ao último, o segundo é igual ao terceiro.

Lino: São iguais... Aqueles dois e aqueles dois. Porque é eles ao contrário.

Professora: O primeiro e o último são iguais. De certeza?

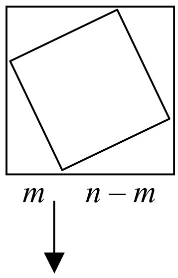
Tita: Sim.

Sara: Eu acho que são iguais porque eles parece que são simétricos.

No entanto, era necessário aprofundar a descoberta de relações entre a área dos quadrados. Por isso, os alunos calcularam as áreas dos quadrados inscritos e usaram a simetria que tinham identificado para reduzir o número de dados que tinham de recolher. Este trabalho conduziu à organização de uma tabela como a seguinte, que eles próprios foram preenchendo.

Lado	Número de quadrados inscritos	1º	2º	3º	4º
2	1	2			
3	2	5	5		
4	3	10	8	10	
5	4	17	13	13	17

A análise desta tabela permitiu formular conjecturas sobre as linhas seguintes, a partir da identificação de um padrão por coluna: somar 3, somar 5, somar 7... A passagem deste processo recursivo para a procura de uma expressão geral que não implicasse o cálculo dos valores de uma linha para saber os valores da linha seguinte, demorou mais tempo. A expressão geral para a área dos quadrados inscritos decorreu, após algum tempo em que os alunos fizeram várias tentativas, de uma proposta da Sara: “Professora, eu acho que é como 4, por exemplo, 4×4 16, mais 1, 17; 5×5 25, mais 1, 26; 6×6 36, mais 1, 37 (...) $n-1$ ao quadrado mais 1”. Surgiram também conjecturas para as expressões gerais das áreas dos quadrados inscritos nas posições 2 e 3. No entanto, a generalização para todos os casos – no quadrado $n\times n$, a área do quadrado inscrito na posição m é $(n-m)^2+m^2$ – foi proposta pela professora. Mas, a compreensão do que ela significava do ponto de vista geométrico, para além de dar sentido à expressão proposta, permitiu organizar uma demonstração que validava a conjectura feita.



Posição m

Para compreender os aspectos essenciais da Álgebra é importante todo um percurso em que os alunos têm contacto com um grande número de experiências algébricas informais que envolvem a análise de padrões e relações numéricas e a sua representação e generalização através de diferentes processos. Esta potencialidade tem sido evidenciada nas tarefas que temos vindo a discutir. De facto, o desafio lançado pela generalização de um padrão numérico e a compreensão do que traduz essa generalização, constituem aspectos que muitas das vezes estão envolvidos nas investigações numéricas e que apoiam o desenvolvimento do raciocínio algébrico.

O campo dos números também é propício à concepção de tarefas de investigação em que os alunos contactam com aspectos da história da Matemática. No exemplo que apresentamos, *Das potências de 2...* (Figura 7), o método subjacente à construção do quadro permite obter as potências de n (número natural) a partir das potências de $n-1$.

---

1. Vamos explorar algumas ideias que foram desenvolvidas pelo matemático Nicómano de Gerasa, no século I da nossa era. Repara que o quadro seguinte foi preenchido parcialmente, segundo determinadas regras, tendo como ponto de partida as potências de 2. Observa-o, com atenção, para perceberes como foram efectuados os cálculos e, em seguida, completa-o.

1	2	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
	$2+\frac{2}{2}=3$	$4+\frac{4}{2}=6$	$8+\frac{8}{2}=12$			
		$6+\frac{6}{2}=9$	$12+\frac{12}{2}=18$			
			$18+\frac{18}{2}=27$			

. Tenta encontrar algumas regularidades entre os números que figuram: em cada linha; em cada coluna; nas diagonais.
. Na coluna que começa em 2^{10} qual será o último número? E na coluna de 2^{20}?

2. Que conjecturas poderás fazer sobre um quadrado semelhante ao anterior que comece com as potências de 3? E sobre um quadro começando com as potências de 4? E sobre outros quadrados?

Figura 7. *Das potências de 2...*

Os alunos, ao explorarem as regularidades sugeridas pelo quadro, estão também a tomar contacto com o método usado por um matemático para escrever as potências de um número natural. Aos processos e conhecimentos matemáticos que podem ser desenvolvidos a partir desta tarefa, alia-se uma ligação a aspectos da história da Matemática que são importantes na formação matemática dos alunos.

Nos exemplos que apresentámos ao longo deste capítulo chamámos a atenção que as investigações numéricas contribuem para desenvolver conceitos importantes. Realizando investigações, os alunos podem desenvolver competências numéricas indispensáveis no mundo de hoje. Eles precisam de saber identificar, compreender e saber usar os números, as operações com os números e as relações numéricas. Os alunos precisam de saber interpretar criticamente o modo como os números são usados na vida de todos os dias e a escola deve procurar desenvolver este tipo de competências.

---

[1] As duas professoras integravam a equipa do projecto MPT. Uma delas, como professora da turma, tinha a seu cargo a condução geral das aulas. A outra participava sobretudo no apoio ao trabalho em pequenos grupos.

[2] Esta tarefa e as que se apresentam mais adiante foram desenvolvidas pela equipa do projecto MPT – *Matemática para todos*.